第 1 章 引论

1.1 Euler 定理

定义 1.1 (多面体(Polyhedron)的定义)

一个**多面体**是指按下述意义很好地拼凑在一起的有限多个平面多边形:

(1) 若两个多边形相交, 则它们交于一条公共边;

(2) 多边形的每一条边恰好还是另一个 (且只有这一个) 多边形的边. 不仅如此, 还要求对于每个顶点,那些含有它的多边形可以排列成 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$,使得 Q_i 与 Q_{i+1} 有一条公共边, $1 \leq i \leq k$, $Q_{k+1} = Q_1$.

♣

笔记 对于条件 (2), 换句话说,这些多边形拼成围绕着该顶点的一块区域 (多边形的数目 k 则可以随顶点的不同而变动). 其中最后一个条件就使两个立方体只在一个公共顶点相衔接的情形排除在外了.

定理 1.1 (Euler 定理)

设 P 为满足下列条件的多面体:

(a) P 的任何两个顶点可以用一系列棱相连接;

(b) P 上任何由直线段 (不一定非是 P 的棱) 构成的圈,把 P 分割成两片.

则对于 P 来说, 有 $v - e + f = 2$, 其中 v 是顶点数, e 是棱数, f 是面数.

♡

证明 P 的一组连通的顶点与棱叫作一个**图(Graph)**.(连通的意思就是任意两个顶点可以用图中的一串棱连接)

更一般些, 我们将用图这一术语来表示三维空间内任何一组如图 1.1 那样很好地衔接起来的有限多个直线段 (若两个线段相交, 则交于公共顶点).

不包含任何圈的图叫作**树形(Tree)**. 注意, 对于一个树形来说, 顶点数减去棱数等于 1 . 若以 T 来记树形,则可以写成公式 $v(T) - e(T) = 1$.

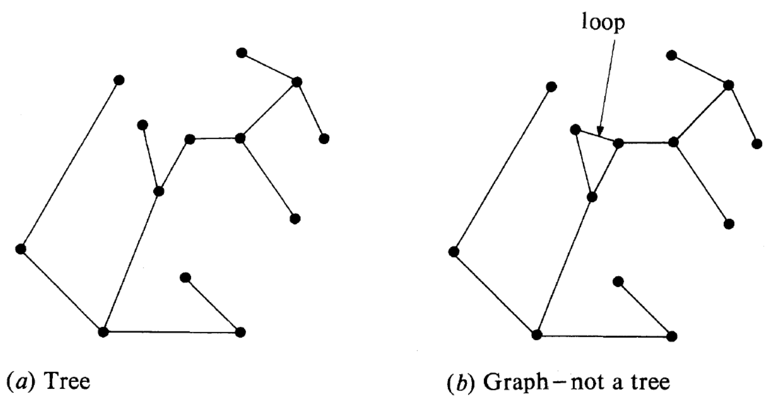


图 1.1: 图

按假设 (a), P 的全体顶点与棱构成一个图. 不难证明,在任何图中可以找到含有全体顶点的树形子图. 于是,我们选择一个树形 T,它包含 P 的某些棱,但包含 P 的全体顶点.

然后构造 T 的一种"对偶". 这种对偶是按下述方式定义的一个图 Γ:

(1) 对于 P 的每个面 A, 我们给出 Γ 的一个顶点 $\widehat{A}$;

(2) Γ 的两个顶点 $\widehat{A}$ 与 $\widehat{B}$ 有一条棱相连, 当且仅当它们相应的面 A 与面 B 在 P 内有一条不属于 T 的公共棱.

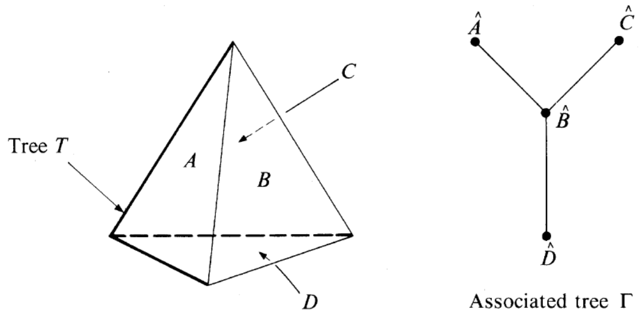
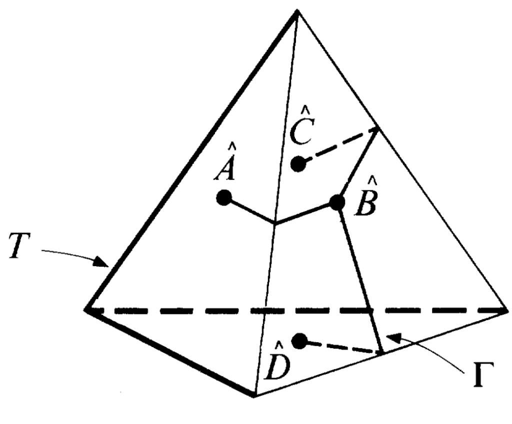


图 1.2: 多面体的树

我们甚至可以将 Γ 在 P 上表示出来,使得它与 T 不相交 (顶点 $\widehat{A}$ 相当于 A 的一个内点),当然这时要允许它的棱可以有一个曲折点. 图 1.3 显示了作法.



Γ represented on P

图 1.3: 树的对偶

很容易相信对偶 Γ 是连通的,从而是一个图. 直观地看,如果 Γ 的某两个顶点不能用 Γ 内的一串棱相连接,则它们必然被 T 内的一个圈分开 (先直观理解, 这需要证明,我们将在第 7 章给出详细证明). 由于 T 不包含任何圈,可以推断 Γ 必然连通.

事实上, Γ 是树形. 若 Γ 内有圈,则按假设 (b),这个圈将把 P 分成两块,每一块将含有 T 的至少一个顶点. 想把分属 T 的这两块的两个顶点用一串棱相连,就不可避免地要碰上那个隔离圈,因此,这一串棱不能全在 T 内. 这就与 T 的连通性矛盾. 因此 Γ 是树形.

由于任何树形的顶点数比棱数多 1,我们有 $v(T)-e(T)=1$,以及 $v(\Gamma)-e(\Gamma)=1$. 于是

$$v(T)-[e(T)+e(\Gamma)]+v(\Gamma)=2$$

但根据构造方式可得

$$v(T)=v,\ e(T)+e(\Gamma)=e,\ v(\Gamma)=f$$

这就完成了 Euler 定理的证明. □

笔记 T 是树形,则 $v(T)-e(T)=1$ 的证明如下：对顶点数 n 使用归纳法，注意到每当多出一个顶点时，这个新顶点只与原本的 n 个点中的某一个点之间存在连线，否则将会出现圈，从而边数也加 1，故归纳成立.

笔记 在任何图中可以找到含有全体顶点的树形子图的证明如下：如果连通图 G 是树，则成立，反之如果不是树，则 G 中存在圈 L，我们删掉 L 中的一条边之后得到的图仍旧是连续的，这样不断删去 G 中的圈，我们最终会得到 G 的一个无圈子图 T，也就是我们所需要的树形子图.

实际上这里是图的生成树的概念:每个连通图都存在生成树.

1.2 拓扑等价

Euler 定理的上述证明给出了比 Euler 公式更多的东西. 只要稍微再多费点力气就可证明：P 是由两个盘形(disc)沿着它们的边界(boundary)粘合(identify)而得到的. 为了看出这一点,将 T 与 Γ 在 P 上略微增厚 (图 1.4), 得到两个不相交的盘子 (**将树形增厚总是得到盘形, 将有圈的图增厚则得到有空洞的空间**).

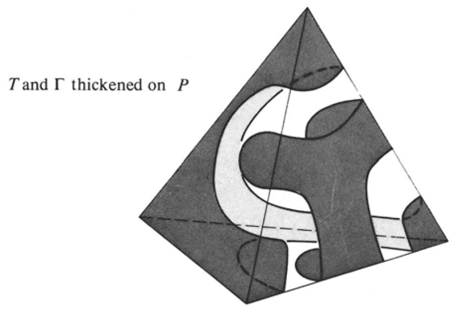


图 1.4: 增厚的 T 与 Γ

使这两个盘子逐步扩大直到它们的边界完全重合，这时多面体 P 就由两个具有公共边界的盘形构成. 当然这些盘子可以是奇形怪状的, 但可以把它们变形, 逐步变成又圆又平的圆盘.

再回想, 球面是由两个盘形 (即南半球与北半球) 沿着公共边界 (即赤道) 缝合而得到的(图 1.5).

换句话说，Euler 定理的假设告诉我们, P 在某种意义下看起来就像是变了形的球面.

对于具体的多面体，我们是容易建立起它的点与球面之间的点的对应关系的. 我们不妨假设它是用橡皮做的，则我们可以想象出一个过程使得它变成一个圆球，如图 1.6.

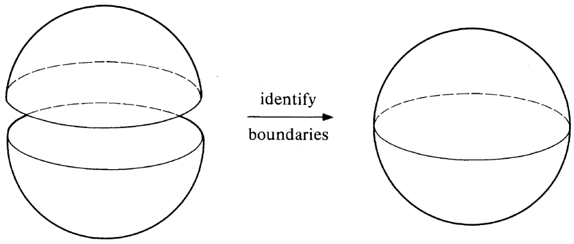


图 1.5: 球面是由两个盘形拼成的

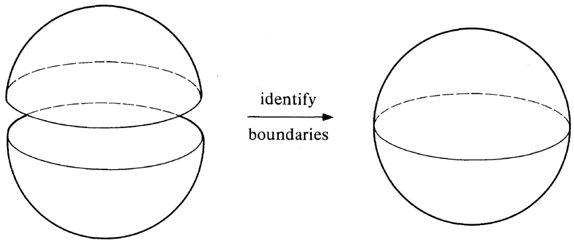


图 1.6: 把多面体变成球

在形变的过程中，**允许将多面体任意拉伸，弯曲，但不允许撕裂，不允许把不同的点粘在一起**，这样所得到的多面体的点与球面的点之间的对应就是所谓拓扑等价或者同胚的一个例子.

确切地说，就是一对一的连续满映射，且逆映射也连续.

笔记 拓扑学研究的是一个对象在连续形变下保持不变的性质.

下面我们来看一些具体的例子：

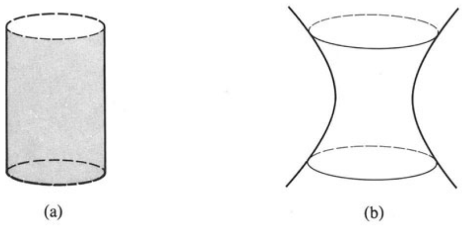


图 1.7: 同胚

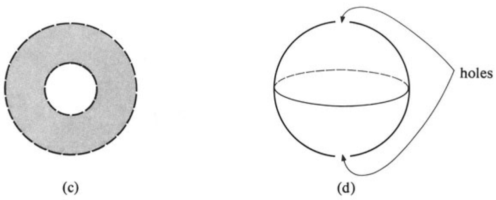


图 1.8: 同胚

笔记 注意：拓扑等价显然是个等价关系.

对于不满足 Euler 定理假设条件的多面体，它们会具有不同的 Euler 数，但是我们会有下面这个结论：

定理 1.2

拓扑等价的多面体具有相同的 Euler 数.

我们等到后面再来证明这个结果.

1.3 曲面

拓扑学所讨论的空间性质是空间在前面所说拓扑等价或同胚之下不改变的性质. 但什么类型的空间是我们感兴趣的, “空间” 的确切含意是什么呢? 同胚的概念全靠连续性的概念来说明. 我们所说的两个空间之间的连续映射又指什么呢? 本节以及 1.4 节将回答这些问题.

先看几个有趣的空间, 如, 平面上的单位圆周、单位圆盘, 又如图 1.9 中画的球面、环面、Möbius 带、柱面以及穿孔双环面等曲面都是在我们所生活的三维空间内实际存在的.

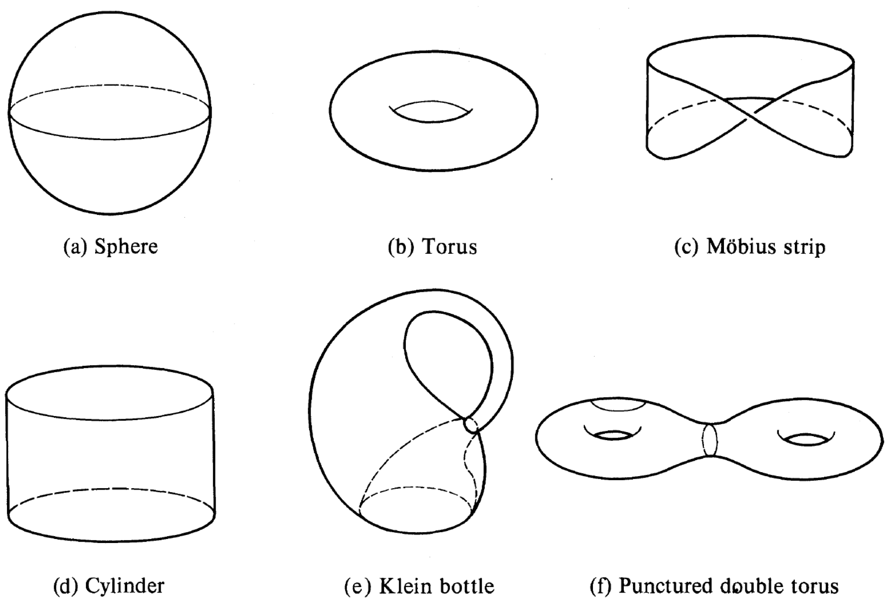


图 1.9: 有趣的曲面

比较复杂和难以想象的是像 Klein 瓶那样的曲面. 任何企图把 Klein 瓶在三维空间内表现出来的尝试, 都必然要使曲面自己相交. 在我们所画的图 1.9 中, 曲面自己相交于一个小圆.

用一个模型来理解 Klein 瓶或许更好些. 通常用来表示环面模型的方法是取一个长方形纸片按图 1.10 的方式粘合它的边.

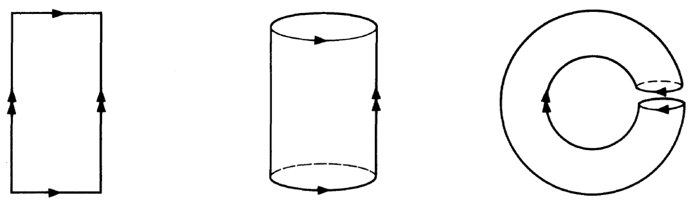


图 1.10: 曲面构造

若要制作 Klein 瓶, 前半部分的构造完全一样, 即先得出一个圆柱面, 然后将圆柱面的两端按照相反的方向粘合. 为了做到这一点, 需要把圆柱弯过来穿到自己里面去, 如图 1.11 所画的那样.

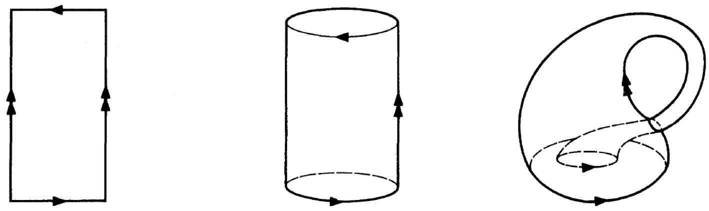


图 1.11: Klein 瓶构造

在四维空间内，Klein 瓶 (K) 可以完全避免自己相交而表示出来. 设想垂直于纸面还有另外一个第 4 维数，并且记住纸面表示通常的三维空间. 在 K 的自交圆处有两个管子穿过. 现在把其中一个略微提高一些到四维空间中, 就避开了自相交叉. 如果你觉得不好理解, 可以先看下面的简单情况, 或许容易想象一些: 图 1.12 a 中是平面上正交的两条直线. 设想我们希望略微变动一点位置而使它们不再相交. 显然限制在平面内是做不到的. 但是, 如果把垂直于纸面的第 3 维也考虑进去, 在交点附近将其中一条直线顺着新添加的方向略微提高一些就消除了交点, 给出如图 1.12 b 所示的两条不相交的直线.

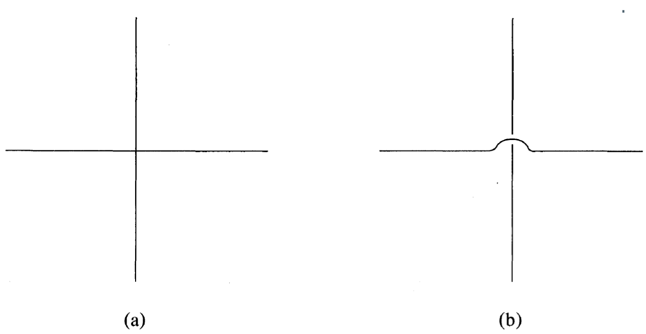


图 1.12: 升高纬度取消交点

再来看一个例子，一个皮筋在二维情况下这样摆放是必定会存在交点的，但是当我们换到三维，转移视角之后就可以做到无交点.

笔记 克莱因瓶的结构可表述为：一个瓶子底部有一个洞，现在延长瓶子的颈部，并且扭曲地进入瓶子内部，然后和底部的洞相连接. 和我们平时用来喝水的杯子不一样，这个物体没有

“边”，它的表面不会终结. 它和球面不同，一只苍蝇可以从瓶子的内部直接飞到外部而不用穿过表面，即它没有内外之分.

“克莱因瓶”这个名字的翻译其实是有些错误的:

因为最初用德语命名时候名字中“Kleinsche Fläche”是“克莱因平面”的意思. 因为翻译问题写成了Flasche，这个词才是瓶子的意思.

不过不要紧,“瓶子”这个词用起来也非常合适.

笔记 关于克莱因瓶，也许可以通过这个视频加深理解：换个角度来看待四维空间的克莱因瓶，这样你就能理解为什么克莱因瓶在三维空间下有交叉点了

依靠在欧氏空间而介绍曲面, 并不像初看起来那样令人满意. 同胚的曲面在我们看来是一样的, 应当作同样的空间来处理. 在图 1.13 中列举了 Möbius 带 M 的三个副本. 前两个之间的同胚是毋庸置疑的,只要把它们当作是橡皮做的[1]就不难看出：橡皮做的前一个 Möbius 带经过撑拉就可变成第二个的模样.

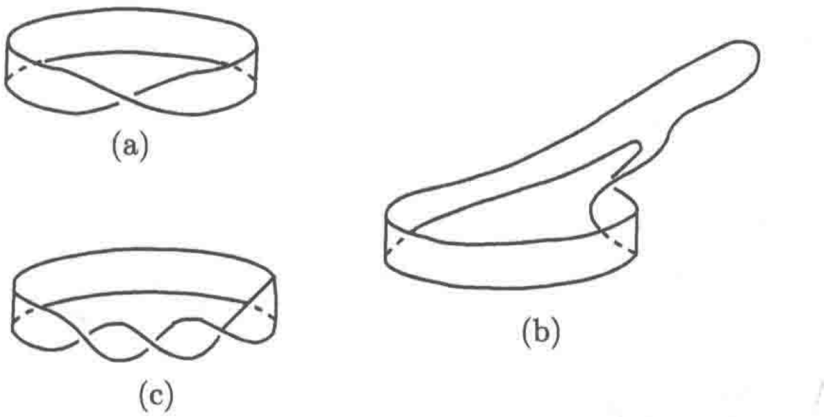


图 1.13: 同胚的莫比乌斯带

但是图 1.13 a 与图 1.13 c 又怎么样呢? 这两个空间是同胚的, 但无论怎么撑拉、弯曲、扭转, 都不能将一个形变为另一个.

笔记 要说明这两个空间同胚, 需要找到它们之间的一个连续一一映射,并且逆映射也是连续的.

忘掉 M 的那几种图样而自己思考 M 怎样造出. 构造一个模型是容易的: 取一个长方形纸条来,扭转半周后将一对对边粘合 (如图 1.14 所示). 这就得到如图 1.13 a 那样最常见的 Möbius 带.

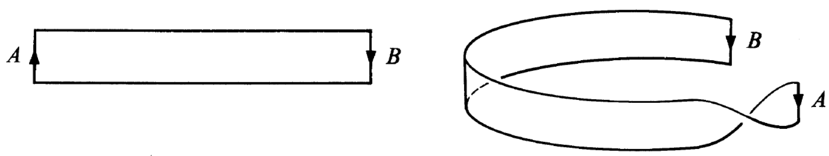


图 1.14: 构造莫比乌斯带

[1]把空间看作是橡皮做的, 用以解释拓扑等价已有相当长的历史; 这种想法源出于 Möbius, 大约在 1860 年左右.

要得到图 1.13 c, 我们必须在以上的制作过程中将纸条多扭转一整周, 也就是, 总共将纸条扭转一周半,然后粘合. 但是从边 A 与边 B 的粘合关系来看,扭转半周与一周半并无差别, 两次都是把同样的点对粘合起来. 因此, 图 1.13 a 与图 1.13 c 中的空间是同胚的. 它们只不过是同一个空间在欧氏空间内的不同表示. 虽然二者之间可以建立同胚, 但是这种同胚无法扩张为整个欧氏空间到自身的同胚; 所谓不同的表示就是在这种意义之下来说的. 换句话说, 不存在从整个欧氏空间到自身的同胚把图 1.13 a 映为图 1.13 c.

如图 1.13 那样一个简单而毫不夸张造作的例子, 使我们深切感到单凭直观有时候也会将人们引入歧途. 这就产生了强烈的要求, 要人们按某种抽象的方式来考虑空间的概念, 不能单单依靠它们在欧氏空间内的特殊表示. 下面我们将设法把曲面的概念用严格的数学语言表述出来. 整个过程将是相当长的, 首先要定义抽象(拓扑)空间, 然后从中识别出曲面, 即局部像欧氏平面的空间.

1.4 抽象空间(Abstract spaces)

一个拓扑空间就是一个集合 X 外加上一套拓扑结构，而定义这个拓扑结构的主要目的是为 X 定义连续性, 也就是为判断 X 上的函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 是否连续设立标准. 那么对于一个抽象集合, 这样的标准该怎么定呢?

一个最简单的办法是: 写出一个由函数构成的集合 $C(X)$,然后规定里面的函数都算连续函数, 而其他的函数则算不连续函数. 当然为了让这样定义的连续性有实际应用价值, $C(X)$ 也不能胡乱地取,可能需要它满足一些基本的规则.

这个想法看起来有些疯狂, 但是用“满足某些基本规则的集合” 来定义概念, 这种思维方式却是合理有效的, 这就是所谓的“公理化方法”. 当然, 上面讲的这种公理体系看上去有些简单粗暴, 用起来很不方便, 为了能构造出更实用的公理体系, 让我们来仔细思考一下连续性的本质. 微积分中的连续函数是如下地用“ ε - δ ” 语言定义的.

定义 1.2

如果函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足: 任取 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$ 使得 $|x - x_0| < \delta$ 蕴涵 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$,则称 f 在 x_0 连续. ♣

它的意思就是说 x 越接近 x_0 ,则 $f(x)$ 越接近 $f(x_0)$. 我们还可以更具体地对它作如下解释: f 连续的定义就是任取一个接近 $f(x_0)$ 的程度的标准 ε，存在一个接近 x_0 的程度的标准 δ，使得只要 x 接近 x_0 的程度达到标准 δ ,则一定能保证 $f(x)$ 接近 $f(x_0)$ 的程度达到标准 ε .

记所有接近 x_0 的程度达到标准 δ 的点构成的集合为 $B_\delta(x_0)$,称为 x_0 的 δ 邻域 (neighborhood). 当然对于任何稀奇古怪的“标准” 都可以按这个规则求得相应的邻域, 也可以从任何邻域出发定义稀奇古怪的“接近的标准”,不过在目前来讲,我们只需要取 δ 是正实数,并取 $B_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\}$. 于是可以把 $\varepsilon - \delta$ 语言改成下面的样子:

命题 1.1

函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 x_0 连续的充分必要条件是: 任取接近 $f(x_0)$ 的程度的标准 ε ,存在接近 x_0 的程度的标准 δ ,使得 $x\in B_\delta(x_0)$ 蕴涵 $f(x)\in B_\varepsilon(f(x_0))$,即 $B_\delta(x_0)\subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$.

概括成一句话,就是 “ $f(x_0)$ 的任何 ε 邻域的原像一定包含 x_0 的某个 δ 邻域” . 注意在这句话里实数的和差积商这些具体的运算都神奇地消失了, 出现的只有一些 “接近某点的程度的标准” 以及 “所有达到该标准的点构成的所谓邻域” . 用一组公理去刻画邻域, 然后用邻域反过来定义接近程度的标准并进而定义连续性, 正是 Hausdorff 想到的办法.

笔记 空间的每点有一组 “邻域” , 这些邻域又引出了连续映射的适当定义, 这就是关键所在. 注意在欧氏空间内定义邻域时完全依靠两点之间的欧氏距离. 在构造抽象空间时, 我们希望保留邻域的概念, 但要避免对距离概念的任何依赖 (拓扑等价不保持距离).

下面我们就按照 Hausdorff 的想法，写出一些定义：

定义 1.3 (基准开邻域结构)

设集合 X 非空. X 上的一个 **基准开邻域结构** (base open neighborhood structure) 是一个映射 $\mathcal{N}:X\to 2^{(2^X)}$,它把每个点 $x\in X$ 对应到一个子集族 $\mathcal{N}(x)$,满足下述三条公理:

(1) $\forall x\in X,\mathcal{N}(x)\neq\varnothing$,并且 $\forall U\in\mathcal{N}(x),x\in U$;

(2) 若 $U,V\in\mathcal{N}(x)$,则存在 $W\in\mathcal{N}(x)$,使得 $W\subseteq U\cap V$;

(3) 若 $y\in U\in\mathcal{N}(x)$,则存在 $V\in\mathcal{N}(y)$ 使得 $V\subseteq U$.

如果 $U\in\mathcal{N}(x)$,则称 U 为 x 的一个 **基准开邻域** (base open neighborhood). 如果 U 包含 x 的某个基准开邻域,则称 U 为 x 的一个**邻域** (neighborhood).

用文字把这三条公理的要求重新叙述一下就是:

(1) x 一定有基准开邻域,并且是其任意基准开邻域的元素;

(2) x 的任意两个基准开邻域的交是 x 的邻域;

(3) 任意基准开邻域是其所含每个元素 y 的邻域.

通常我们总是会尽可能地挑一些形状简单, 能够明确显示出 “接近程度” 的子集作为基准开邻域, 而邻域的形状就可以奇怪得多了 (参见图 1.15).

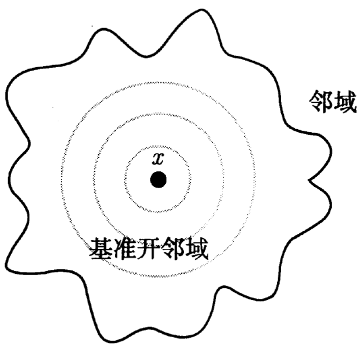


图 1.15: 基准开邻域和邻域

笔记 上面的定义选自包志强老师的《点集拓扑与代数拓扑引论》，而 Armstrong 的书中给出了不同的定义，如下列出：

设有一个集合 X ,并且对于 X 的每一点 x 选定了一个以 X 的子集为成员的非空组合,这每个子集叫作 x 的一个邻域. 邻域需要满足下列四条公理:

(a) x 在它自己的每个邻域里.

(b) x 的任何两个邻域的交集为 x 的一个邻域.

(c) 若 N 是 x 的邻域, U 为 X 的子集,它包含 N ,则 U 是 x 的邻域.

(d) 若 N 是 x 的邻域,并且若 N° 表示集合 $\{z \in N \mid N$ 是 z 的邻域 $\}$,则 N° 是 x 的邻域. (集合 N° 叫作 N 的内部.)

我们也可以把所有的 x 的邻域放在一起记做 $\mathcal{M}(x)$,然后考虑这个对应 $\mathcal{M}$,把它称为 **邻域结构** (neighborhood structure). 基准开邻域结构和邻域结构都能刻画连续性. 通常邻域有很多很多, 并不方便都列出来, 而基准开邻域结构则比较容易写出. 但它的缺点则是: 同一种连续性可以用许多不同的基准开邻域结构来描述.

打个比方, 邻域结构就相当于一个线性空间中所有向量构成的集合, 而基准开邻域结构相当于这个线性空间中的一组基. 所以很显然, 在定义拓扑概念的时候, 我们还是希望从更具有确定性的邻域结构出发去定义, 等到具体计算的时候再用基准开邻域结构, 而不是从基准开邻域结构出发去写一个表达式不那么确定的公式作为定义. 当然邻域结构里依然包含很多冗余信息, 因此我们最终选取另一套与之相互唯一决定的, 更加简洁齐整的东西, 把它称为拓扑结构.

定义 1.4 (拓扑结构)

设 $\mathcal{N}$ 是集合 X 上的基准开邻域结构. 如果 X 的子集 U 是每一个元素 $x \in U$ 的邻域,则称 U 为一个 **开集** (open set).

称 X 上所有开集构成的子集族 τ 为一个由 $\mathcal{N}$ **生成** (generate) 的 **拓扑结构** (topological structure),简称 **拓扑** (topology).

X 和 τ 合在一起,称为一个 **拓扑空间** (topological space),记做 (X, τ) . ♣

笔记 于是基准开邻域结构的公理 (3) 就告诉我们, 每个基准开邻域都是开集. 当然, 一般的邻域不一定是开集.

定义 1.5 (连续(continuous))

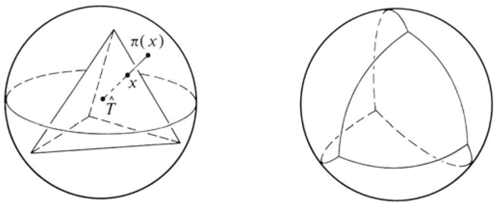
设 X 与 Y 是拓扑空间，若对于 X 的每点 x，以及 $f(x)$ 在 Y 内的任意邻域 N，集合 $f^{-1}(N)$ 为 x 在 X 内的邻域，则称映射 $f: X \to Y$ 是连续的. ♣

定义 1.6 (同胚(homeomorphism))

映射 $h: X \to Y$ 叫作是一个同胚，假如它是一对一的连续满射,并且有连续的逆映射. 如果这样一个映射存在,则称 X 同胚于 Y(X and Y are called homeomorphic) ,或 X 拓扑等价(topologically equivalent)于 Y . ♣

下面我们给出大量例子来帮助我们理解拓扑空间：

- 任何欧氏空间按通常的方式定义邻域就是一个拓扑空间．稍后, 我们将证明不同维数的欧氏空间不能互相同胚. 这是一个困难的问题, 但是它的解决关系到我们所给的同胚定义是否能与空间维数的概念并行不悖.
- 设 X 为拓扑空间, Y 为 X 的子集. 我们可以在 Y 上按如下的方式定义一个拓扑. 对于一点 $y \in Y$,取出它在拓扑空间 X 的全体邻域,使这每个邻域与 Y 相交. 所得的交集作为 y 在 Y 内的邻域. 拓扑结构的公理不难验证，我们说 Y 具有子空间拓扑. 这是一个非常有用的手段．例如, 这使我们可以把欧氏空间的任何子集看作一个拓扑空间．特别地, 我们曾经举出过的各个曲面都成了拓扑空间.
- 设 C 为复平面上的单位圆周, $[0,1)$ 为大于等于 0 、小于 1 的全体实数. 使这两个集合分别具备平面与实数轴的子空间拓扑. 按 $f(x) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x}$ 定义 $f : [0,1) \to C$, 则给出了一个连续映射．注意这个映射是一对一的满射．它的逆映射不连续．(为什么?) 这说明在同胚定义中对于逆映射的连续性要求是非常重要的: 如果得出圆周同胚于区间, 那将是很令人扫兴的事.
- 考虑下图所显示的情况,并把球面与四面体表面看作是 $\mathbf{E}^3$ 的子空间. 验证径向投影 π 给出这两个空间之间的一个同胚. 这种类型的同胚叫作单纯剖分 (这里得到的是球面的一种单纯剖分), 后面将有一章专门讨论它.



Radial projection π

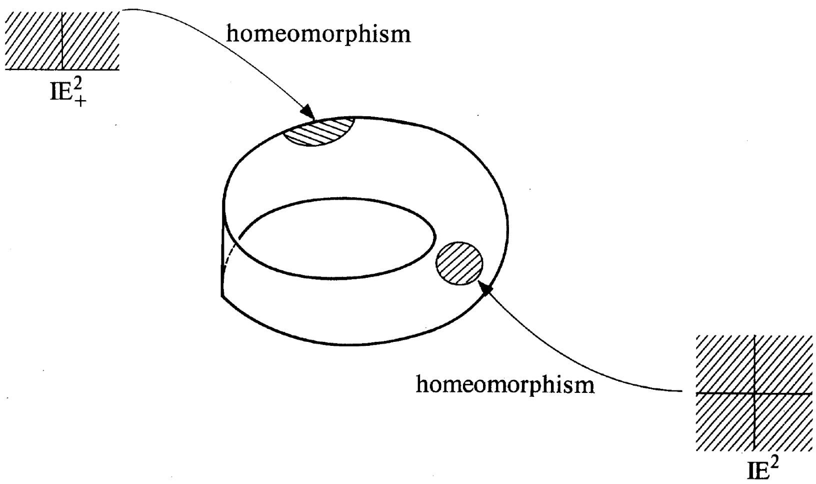
- 集合上的距离函数或度量给出这个集合上的拓扑. 邻域的构造恰如欧氏空间的情形．我们对于某个函数空间来阐明这一点. 设 X 为在实数轴的闭区间 I 上定义的连续实值函数集合. 这个集合内的函数必然是有界的, X 上通常的距离函数定义为
$$d(f,g) = \sup_{x\in I} |f(x) - g(x)| .$$
若对于某个正实数 ε，所有与 f 的距离小于或等于 ε 的函数都在 N 内，则称 $f \in X, X$ 的子集 N 是 f 的邻域
- 两个不同拓扑空间的点集可以是同一个．作为一个比较奇怪的拓扑结构的例子, 在全体实数上定义一个子集为某实数的邻域, 假如它含有该实数, 并且它的补集是有限集. 这就给出了与实数轴很不一样 (不同胚) 的拓扑空间．注意, 实数集合上没有一个距离函数给出这个拓扑. (为什么?)
- 设 X 为一个集合,并且对每点 $x \in X$,定义 $\{x\}$ 为 x 的一个邻域. 从而按公理 (c), X 内任何含有 x 的子集是 x 的邻域. 直观地看,这个拓扑使 X 成为离散的点集,每点 x 有一个邻域不包含任何其他的点,在这个拓扑之下,任何以 X 为定义域的映射是连续的.

我们现在已经有了充分的准备来确切地说明什么是曲面, 不用一定要限制在某个欧氏空间内来考虑问题了.

定义 1.7 (曲面)

曲面是这样的拓扑空间: 它的每一点有同胚于平面的邻域, 并且任意不同的两点有不相交的邻域. ♣

笔记 我们所给出的是尽可能简单的定义. 如果允许曲面有棱或边缘 (像 Möbius 带的情形), 则不能期望每点有邻域同胚于平面. 我们还必须允许某些点具有同胚于上半平面 (由平面上 y 坐标大于或等于零的点构成). 所有我们见到的关于曲面的例子, 当它们被给以欧氏空间的子空间拓扑时, 都能很好地符合这个定义. 下图举例说明 Möbius 带是符合这个定义的.



1.5 一个分类定理

在这一章，我们将考虑比较好的一类曲面，只考虑那种没有边缘的曲面，它们在某种意义下是自封闭的，除此之外，还要求曲面是联通的，即只有一整块.

球面，环面，Klein 瓶都是我们中意的曲面，圆柱面与 Möbius 带应该排除在外，因为它们有棱. 全平面等曲面不是封闭的，也排除在外.

确切地说，我们考虑的是紧致连通曲面，准确的定义我们之后再叙.

值得注意的是，如果我们同意只考虑这些所谓的闭曲面，则我们可以确切地说出这些去曲面一共有多少，也就是可以将它们**分类**. 这就是说，我们可以列出一张曲面的表，使得任何的闭曲面都同胚与表上的一个曲面，并且表上的任意两个曲面不同胚.

可以按下述方式造出一些闭曲面.取一个普通的球面来，挖去两个不相交的圆盘，然后添加上一个圆柱面，使得圆柱面的两个边界圆分别粘在球面上开出的圆孔上，如图 1.16 所示. 这个过程叫作“添加一个环柄”到球面上. 重复进行，得到添上两个、三个或任意有限多个环柄的球面. 你应能看出带有一个环柄的球面只不过是(同胚于)一个环面. 通过添加环柄将给出我们列表中曲面的半数.

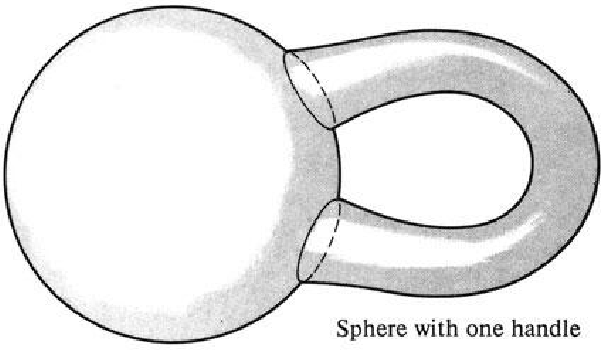


图 1.16: 添加一个环柄

遗憾的是，另一半就像 Klein 瓶那样不能在三维欧氏空间内表示出来，因此比较难以想象. 幸而这些曲面模型的构造过程还不难描述：从一个球面开始，挖去一个圆盘，并在此处添上一个 Möbius 带，注意 Möbius 带的边缘是由一整个圆周构成，所以只需将这个圆周与球面上所开圆洞的边界圆周粘起来便可. 你必须想象这个粘合过程是在某个具有充分余地的空间 (四维欧氏空间就足够) 内完成的[2]. 不使 Möbius 带自己相交而在三维空间内做这种粘合是办不到的，所得到的闭曲面叫作**射影平面**.

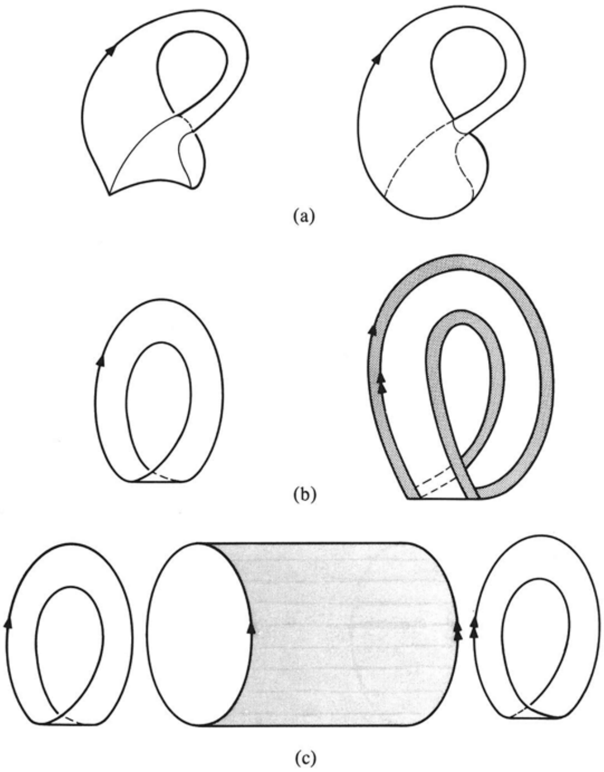


图 1.17: 添加莫比乌斯带

对于每个正整数 n,我们可以从球面挖去 n 个互不相交的圆盘，然后各替换上一个 Möbius 带，从而得到一个闭曲面. 当 $n=2$ 时，就重新得到 Klein 瓶，图 1.17 的用意就是打算说明为什么是这样. 将 Klein 瓶在三维空间内的通常示意图一劈为两半，并将这两片各作稍许挪动以

[2]在第四章中，我们将介绍如何可以毫不涉及空间 $\mathbf{E}^3$ 或 $\mathbf{E}^4$ 内的模型而将两个拓扑空间粘合，以得到一个新的拓扑空间.

避免自己相交，于是得到两个 Möbius 带，如图 1.17a 所示. 取出其中之一来，标出边界圆周的一个小邻域；这个邻域同胚于圆柱面. 除去圆柱面(见图 1.17c), 剩下一个略微小些的 Möbius 带. 读者自然会想起圆柱面同胚于挖去两个不相交的圆盘的球面. 因此，Klein 瓶的通常描述与这里 $n=2$ 时的构造完全一致.

定理 1.3 (分类定理(Classification theorem))

任何闭曲面或者同胚于球面，或者同胚于添加了有限多个环柄的球面，或者同胚于挖去有限多个圆盘而以莫比乌斯带代替的球面. 而这些曲面两两不同胚. ♡

这个定理将于第七章证明.

添加了 n 个环柄的球面叫做**亏格(genus)**为 n 的**可定向曲面(orientable surface)**. 之所以称之为可定向曲面，是因为如果在这种曲面上画一条平滑的闭曲线，在曲线上某些点选定切向量与法向量(也就是说，在各点附近选定了坐标系——通常叫作**局部定向(local orientation)**),然后让这些向量沿曲线运行一周，则仍然回到原来的一组向量(图 1.18a).

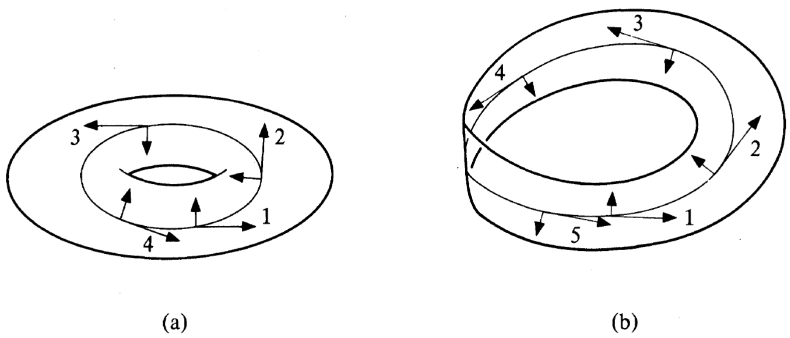


图 1.18: 可定向曲面与不可定向曲面

任何包含有 Möbius 带的曲面不满足这个性质，因此叫作不可定向曲面.所列表中的后一半都是这一类. 图 1.18b 表明当切向量与法向量沿着 Möbius 带的中心圆运行一周时, 法向量方向逆转.

1.6 拓扑不变量(Topological invariants)

证明两个空间拓扑等价是一个几何问题，将涉及怎样造出两个空间之间具体的同胚，所用的技巧随问题的不同而改变. 但求证两个空间不同胚，则是性质完全不同的一个问题，我们不可能将两个空间之间的所有映射都拿来检验它们是否同胚，我们采取的办法是考虑拓扑不变量：不变量可以是空间的某种几何性质，也可以是数，比如对空间有定义的 Euler 数，也可以是代数系统，比如从空间造出来的群或者环，重要之处在于这些不变量在同胚的意义下保持不变.

如果我们怀疑两个空间不同胚，可以计算它们的某些不变量，一旦发现算出的答案不一样，则我们立刻就得到他们不是同胚的，下面是几个例子：

- 在第 3 章中我们将引进连通性的概念：大体上说，空间是连通的，假如它是一整块. 这个概念可以很准确地定义，并且人们也会毫不惊奇地看出，当施用拓扑映射于连通空间时，所得的结果仍然是连通的；也就是说，连通性是拓扑不变量. 平面 $\mathbf{E}^2$ 是连通空间的一个例子，直线 $\mathbf{E}^1$ 也是. 但是，如果我们从 $\mathbf{E}^1$ 除去原点，则空间分成了两块 (相应于正的实数与负的实数), 这就是一个不连通的空间，假定有一个同胚 $h : \mathbf{E}^1 \to \mathbf{E}^2$ 存在，则它将诱导一个从 $\mathbf{E}^1 - \{0\}$ 到$\mathbf{E}^2 - \{h(0)\}$ 的同胚.但 $\mathbf{E}^2$ 除去一点后是个连通空间 (还是一整块), 而$\mathbf{E}^1 - \{0\}$ 不连通. 因此，可以得出 $\mathbf{E}^1$ 于 $\mathbf{E}^2$ 不同胚.
- 这个例子考虑 Poincaré 所引入的一种构造，这将是第 5 章的主题. 他的想法是把每个拓扑空间对应于一个群，使得同胚的空间具有同构的群. 如果我们想区别两个空间，可以先尝试以代数的方式来解决问题，计算它们的群，看看这些群是否同构。如果这些群不同构，则空间是不同的 (不同胚). 当然也许我们运气不好，得出同构的群，这时就得谋求更精细的不变量来区别这两个空间.

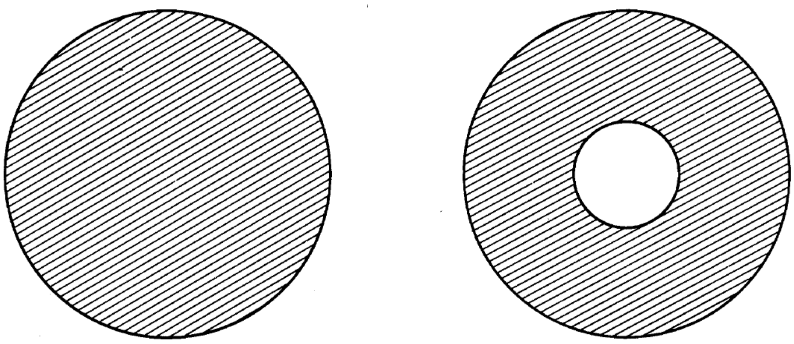


图 1.19: 圆盘与环形

考虑图 1.19 所画的两个空间. 我们不能指望这两个空间之间存在着同胚，毕竟环形区域中间有个洞而圆盘没有. 这个洞的影响可由图 1.20 内的环道 α 很好地反映出来. 正是由于有这个洞，使得环道 α 不能在环形区域里面连续地缩成一点. 而在一个圆盘里，任何环道可以连续地缩为一点. Poincaré 的构造是用像 α 这样的环道来产生一个群，所谓这个环形区域的基本群：这个群将使环形域有洞的事实得到突出的反映.

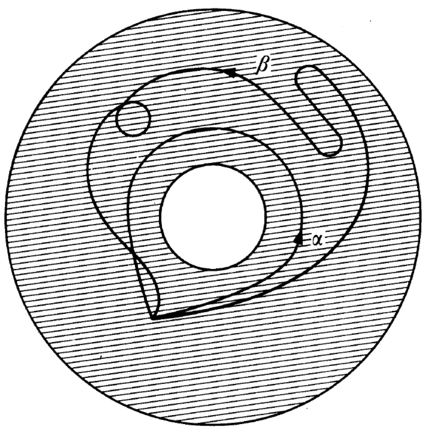


图 1.20: 环道

像 α 这样的环道将给出基本群的一个非平凡元素. 再看环形区域，环道 β 也同 α 一样能使我们识别洞的存在，因为 β 可以作不经过洞区的连续形变而变成 α. 这就提示说 β 应与 α 代表基本群内的同一个元素，考虑以某个特定的点为环道的起点与终点，就可以按自然的方式作环道的乘积.环道 α 与 β 的乘积$\alpha \cdot \beta$, 可以理解为先沿 α 而行，接着沿 β 而行的复合环道.在这个乘法之下，环道集合本身不能构成一个群，但如果把(保持端点不动)可以互相连续形变的环道等同起来，则所得到的环道等价类集合确实构成一个群(思考一下这是为什么).

以上的讨论可以严格化：从数学上说，拓扑空间 X 内的环道是一个连续映射 $\alpha : C \to X$,其中 C 表示复平面上的单位圆周；若 $\alpha(1) = p$, 其中点 p 在 X 中，则我们说环道以 p 为起点与终点. 图中环道上标出的箭头指示 θ 增加的方向，其中 θ 为 C 的参数，C 参数化为 $\{e^{i\theta} | 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ 把箭头逆转产生另一个不同的环道，相当于在基本群内取逆元素. 最简单的环道是把 C 映为一点 p 的映射，这个环道代表基本群内的单位元素.

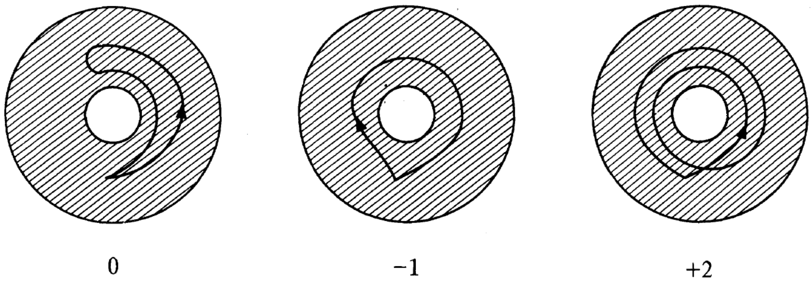


图 **1.21:** 0,-1,+2

圆盘的基本群是平凡群，这是因为任何环道可连续地缩为一点(连续形变定义的细节到第 5 章再说). 环形区域的基本群为整数所构成的无限循环群. 图 1.21 给出了代表 0，-1 与 +2 的环道.

下面再列举几个将利用基本群来解决的问题 (三个来自几何，一个来自代数),这或许是结束本章，并使读者能够窥见以后各章端倪的最佳方式:

- 定理 1.3 所列的表中任何两个曲面的基本群不同构，因此，这些曲面互不同胚.
- Jordan 分离定理: 平面内的任何简单闭曲线将平面分为两块.
- Brouwer 不动点定理: 圆盘到自己的任何连续映射至少有一个不动点.
- Nielsen-Schreier 定理: 自由群的子群是自由群.